Das elektrostatische Feld zweier Kondensatorformen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde

Genehmigt von der Philosophischen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

Von
WILHELM GÖHRE
aus Berlin

Tag der Promotion: 24. Februar 1931
Tag der mündlichen Prüfung: 21. Februar 1929

131

Referenten: Prof. Dr. von LAUE, Prof. Dr. SCHRÖDINGER

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus:
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik
Band 10, 1930, Seite 547 bis 563.

Das elektrostatische Feld zweier Kondensatorformen.

Von **WILHELM GÖHRE** in Berlin.

Einleitung. Die Ablenkung, welche Elektronen beim Durchlaufen des elektrischen Feldes eines Kondensators erfahren, setzt sich aus der Ablenkung zusammen, die von dem als homogen anzusehenden Teil des Feldes herrührt, und aus der Ablenkung, die der übrigbleibende Rand ausübt. Für den Experimentator ist es hierbei wichtig, den Einfluß des Randes genau zu kennen und seine Größe möglichst klein zu halten. Um diesen Forderungen zu genügen, hat Herr Professor von Laue angeregt, dem gewöhnlichen Kondensator zwei auf das Potential Null geladene ebene Leiter vorzuschalten (Abb. 1), oder eine Anordnung von ebenen Leitern zu wählen, deren Schnittlinien mit der x, y-Ebene die Abb. 2 verdeutlicht (der Buchstabe $v >$ Null). Die elektrostatischen Felder dieser beiden Kondensatoren (mit der Dielektrizitätskonstanten ε) untersuche ich in

Abb. 1.

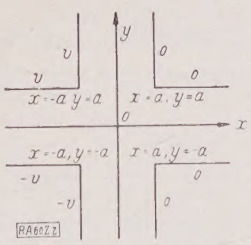

Abb. 2.

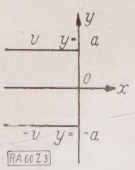

Abb. 3.

der vorliegenden Arbeit. Die Größen der Randwirkungen werden bestimmt und ihre Werte mit der Größe der Randwirkung eines von Helmholtz behandelten ebenen Kondensators (Abb. 3) verglichen.

Hierbei ergibt sich folgendes Resultat.

Für den in der Abb. 1 dargestellten Kondensator hat der Einfluß des Randes auf ein Elektron den kleinsten Wert, für den durch die Abb. 2 gekennzeichneten wird dieser Wert etwas größer. Im Helmholtzschen Fall erhält man für die Größe der Randwirkung keinen endlichen Wert, wenn die Kondensatorplatten in einer der beiden Richtungen der reellen Achse unendlich ausgedehnt gedacht werden. Bei endlicher Länge der Kondensatorplatten hat der Einfluß des Randes auf ein Elektron einen endlichen Wert, der größer ist als die beiden zuerst genannten Werte.

Erstes Feld (Abb. 1).

1. Die Bestimmung der zueinander konjugierten Potentialfunktionen $\psi(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ des elektrostatischen Feldes im Parallelstreifen $-a \leqq y \leqq +a$ der x, y-Ebene[1]. Wir wählen in der komplexen w-Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem w_1, w_2 und ein System ebener Polarkoordinaten ϱ_w, ϑ_w mit übereinstimmenden positiven Drehungsrichtungen, deren gegenseitige Lage die Abb. 4 kennzeichnet. Dann schlitzen wir die w-Ebene längs der negativen Hälfte der reellen Achse auf, verbinden den veränderlichen Punkt $P(w_1, w_2)$ mit dem Anfangspunkt 0, mit dem Punkt $P'(w_1 = -1, w_2 = 0)$ und betrachten die Winkel φ und ϑ_w (Abb. 4).

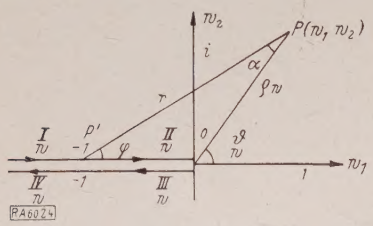

Abb. 4.

Rückt der zunächst in der Halbebene $J(w) > 0$ befindlich angenommene Punkt $P(w_1, w_2)$ in das Geradenstück I_w, so nehmen die Winkel φ und ϑ_w beide den Wert π an. Rückt er in das Geradenstück II_w, so nimmt φ den Wert 0, ϑ_w den Wert π an. Befindet sich der veränderliche Punkt in der Halbebene $J(w) < 0$ und rückt er in das Geradenstück III_w, bzw. IV_w, so nehmen die Winkel φ und ϑ_w die Werte 0 und $-\pi$, bzw. $-\pi$ an. Auf der positiven reellen Achse wird $\varphi = \vartheta_w = 0$.

Der Tangentialsatz, angewandt auf das Dreieck OPP', liefert, da $\alpha = \vartheta_w - \varphi$ ist für φ den Ausdruck

$$\varphi = \frac{\vartheta_w}{2} + \operatorname{arctg}\left[\frac{\varrho_w - 1}{\varrho_w + 1} \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta_w}{2}\right];$$

hierbei sind unter dem Zeichen $\operatorname{arctg}\left[\frac{\varrho_w - 1}{\varrho_w + 1} \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta_w}{2}\right]$ diejenigen Zahlen $\frac{2\varphi - \vartheta_w}{2}$ zu verstehen, welche der Hauptbedingung $\operatorname{tg}\frac{2\varphi - \vartheta_w}{2} = \frac{\varrho_w - 1}{\varrho_w + 1} \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta_w}{2}$ und der Nebenbedingung $-\frac{\pi}{2} \leqq \frac{2\varphi - \vartheta_w}{2} \leqq \frac{\pi}{2}$ genügen. Bezeichnet r den Abstand der Punkte P und P', so wird

$$r = \sqrt{\varrho_w^2 + 2 \cdot \varrho_w \cdot \cos\vartheta_w + 1}\,.$$

Dann ist die Funktion

$$\left.\begin{aligned}\frac{v}{\pi} \cdot \left[\lg r + i \cdot \varphi\right] = \frac{v}{2 \cdot \pi} \cdot \lg\left[\varrho_w^2 + 2 \cdot \varrho_w \cdot \cos\vartheta_w + 1\right] + \\ + i \cdot \frac{v}{\pi} \cdot \left[\frac{\vartheta_w}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho_w - 1}{\varrho_w + 1} \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta_w}{2}\right)\right] - \pi \leqq \vartheta_w \leqq +\pi\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

analytisch im Innern der aufgeschlitzten w-Ebene und

$$\psi(w_1, w_2) = \frac{v}{2\pi} \cdot \lg\left[\varrho_w^2 + 2\,\varrho_w \cdot \cos\vartheta_w + 1\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$\varphi(w_1, w_2) = \frac{v}{\pi} \cdot \left[\frac{\vartheta_w}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho_w - 1}{\varrho_w + 1} \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta_w}{2}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

sind darin reguläre, zueinander konjugierte Potentialfunktionen der Veränderlichen w_1, w_2. Das gilt auch noch für die Geradenstücke I_w, II_w und III_w IV_w mit Ausnahme der Punkte $w = 0$, $w = -1$ und dem unendlich fernen Randpunkt, sobald man sich die aufgeschlitzte Ebene und jene Funktionen über diese Geradenstücke fortgesetzt denkt.

[1]) Im folgenden (Erstes und Zweites Feld) soll der Ausdruck $a^{p/q}$ ($a > 0$, reell, $p/q > 0$, rational) stets den Wert $e^{\frac{p}{q} \cdot \lg a}$ bedeuten, ($x = \lg a$ soll die einzige reelle Lösung der Gleichung $e^x = a$ bezeichnen).

Die Funktion:

$$x + i \cdot y = \frac{a}{\pi} \cdot \log w = \frac{a}{\pi} \cdot [\lg \varrho_w + i \cdot \vartheta_w] , (-\pi \leqq \vartheta_w \leqq +\pi) \quad . \quad . \quad (4)$$

bildet die längs der negativen Hälfte der reellen Achse aufgeschlitzte w-Ebene umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere des von den Parallelen $y = -a$ und $y = +a$ begrenzten Streifens der x, y-Ebene ab (Abb. 4 u. 5).

Führen wir die aus Gl. (4) folgenden Beziehungen $\varrho_w = e^{\frac{\pi}{a} \cdot x}$, $\vartheta_w = \pi/a \cdot y$ ein, so wird die Funktion:

$$\psi(x, y) + i\,\varphi(x, y) = \frac{v}{2\pi} \cdot \lg\left[e^{2 \cdot \frac{\pi}{a} \cdot x} + 2 \cdot e^{\frac{\pi}{a} \cdot x} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a} \cdot y\right) + 1\right] + \left.\begin{aligned} &+ i \cdot \frac{v}{\pi} \cdot \left\{\frac{\pi}{2a} \cdot y + \operatorname{arctg}\left[\frac{e^{\frac{\pi}{a} \cdot x} - 1}{e^{\frac{\pi}{a} \cdot x} + 1} \cdot \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2a} \cdot y\right]\right]\right\} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

analytisch im Parallelstreifen $-a \leqq y \leqq +a$ der x, y-Ebene mit Ausnahme der Punkte $x = 0$, $y = +a$ und $x = 0$, $y = -a$ und den unendlich fernen Ecken. An den begrenzenden geradlinigen, ebenso wie die Geradenstücke benannten Leitern $I_{x,y}$, $II_{x,y}$, $III_{x,y}$, $IV_{x,y}$ nimmt $\varphi(x, y)$ deren Randwerte $v, 0, 0, -v$ an. Auf der reellen Achse wird $\varphi(x, y) = 0$. In den Punkten $x = 0$, $y = +a$, bzw. $x = 0$, $y = -a$ kann die Potentialfunktion $\varphi(x, y)$ bei geeigneter Wahl der Art der Annäherung alle Werte von 0 bis $+v$ bzw. $-v$ bis 0 annehmen und im Unendlichen alle Werte von $-v$ bis v.

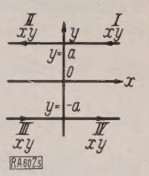

Abb. 5.

2. Verlauf der Kraft- und Niveaulinien. Lösen wir die Gleichung der Kraftlinien

$$\frac{v}{2 \cdot \pi} \cdot \lg\left[e^{2 \frac{\pi}{a} \cdot x} + 2 \cdot e^{\frac{\pi}{a} \cdot x} \cos\left(\frac{\pi}{a} \cdot y\right) + 1\right] = k, \quad [-\infty \ldots k \ldots + \infty]$$

nach y auf, so erhalten wir

$$y = \frac{a}{\pi} \cdot \arccos\left[\frac{e^{2 \cdot \frac{\pi}{v} \cdot k} - e^{2 \cdot \frac{\pi}{a} \cdot x} - 1}{2 e^{\frac{\pi}{a} \cdot x}}\right] = \frac{a}{\pi} \cdot \arccos\left[e^{\pi\left[\frac{2}{v} \cdot k - \frac{x}{a}\right]} - \operatorname{Cos}\left[\frac{\pi}{a} \cdot x\right]\right];$$

hierbei haben wir unter dem Zeichen $\arccos\left[e^{\pi\left[\frac{2}{v} \cdot k - \frac{x}{a}\right]} - \operatorname{Cos}\left[\frac{\pi}{a} \cdot x\right]\right]$ in der oberen Hälfte $0 \leqq y \leqq +a$ des Parallelstreifens $-a \leqq y \leqq +a$ der x, y-Ebene diejenigen Zahlen $\pi/a \cdot y$ zu verstehen, welche die Hauptbedingung

$$\cos\left(\frac{\pi}{a} \cdot y\right) = e^{\pi\left[\frac{2}{v} \cdot k - \frac{x}{a}\right]} - \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right)$$

und die Nebenbedingung $0 \leqq \pi/a \cdot y \leqq +\pi$ erfüllen, in der unteren Hälfte $-a \leqq y \leqq 0$ diejenigen Zahlen $\pi/a \cdot y$, welche dieselbe Hauptbedingung, aber die Nebenbedingung $-\pi \leqq \pi/a \cdot y \leqq 0$ befriedigen.

Eine analytische Untersuchung dieser Gleichung ergibt für den Verlauf der Kraftlinien folgendes Ergebnis:

In der oberen Hälfte $0 \leqq y \leqq +a$ des Parallelstreifens beginnen die Kraftlinien $k < 0$ auf dem geradlinigen Leiter $I_{x,y}$ in den Punkten $x = a/\pi \cdot \lg(1 + e^{\pi/v \cdot k})$, $y = +a$ und endigen auf dem geradlinigen Leiter $II_{x,y}$ in den Punkten $x = a/\pi \cdot \lg(1 - e^{\pi/v \cdot k})$, $y = +a$. Für $a/\pi \cdot \lg[1 - e^{\pi/v \cdot k}] < x < a/\pi \cdot \lg[1 + e^{\pi/v \cdot k}]$ verlaufen sie nach unten konvex und sind in bezug auf die Parallelen $x = \frac{a}{2\pi} \cdot \lg\left[1 - e^{2 \frac{\pi}{v} \cdot k}\right]$, die sie in

$$y = \frac{a}{\pi} \cdot \arccos\left(-\sqrt{1 - e^{2 \frac{\pi}{v} \cdot k}}\right), \quad \frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\sqrt{1 - e^{2 \frac{\pi}{v} \cdot k}}\right) < \pi$$

senkrecht schneiden, symmetrisch. Für den arccos gilt in dem abgeschlossenen Intervall die Bestimmung

$$\frac{\pi}{2} < \arccos\left[e^{\pi\cdot\left[\frac{2}{v}\cdot k-\frac{x}{a}\right]} - \operatorname{Cos}\left[\frac{\pi}{a}\cdot x\right]\right] \leqq \pi.$$

Die Kraftlinie, für welche k kleiner ist als jede noch so kleine negative Zahl, schrumpft auf den Punkt $x = 0$, $y = +a$ zusammen.

Die Kraftlinie $k = 0$ beginnt hier auf dem geradlinigen Leiter $I_{x,y}$ im Punkte $x = a/\pi \cdot \lg 2$, $y = a$. Sie verläuft für $x < a/\pi \cdot \lg 2$ nach unten konvex und nähert sich mit unbegrenzt abnehmendem x der Parallelen $y = a/2$ asymptotisch. Ihr entspricht die Funktion

$$y = \frac{a}{\pi}\cdot\arccos\left[-\frac{e^{\pi/a\,.\,x}}{2}\right], \quad +\frac{\pi}{2} < \arccos\left[-\frac{e^{\pi/a\,.\,x}}{2}\right] \leqq +\pi.$$

Das Entsprechende gilt für die Kraftlinien $k \leqq 0$ in der unteren Hälfte $-a \leqq y \leqq 0$ des Parallelstreifens.

Die Kraftlinien $k > 0$ beginnen auf dem geradlinigen Leiter $I_{x,y}$ in den Punkten $x = a/\pi \lg[e^{\pi/v\,.\,k} + 1]$, $y = a$ und endigen auf dem geradlinigen Leiter $IV_{x,y}$ in den Punkten $x = a/\pi \cdot \lg[e^{\pi/v\,.\,k} + 1]$, $y = -a$. Sie schneiden die x-Achse senkrecht in $x = a/\pi \cdot \lg[e^{\pi/v\,.\,k} - 1]$.

Die Punkte $x = \frac{a}{2\pi}\cdot\lg\left[e^{2\frac{\pi}{v}\cdot k} - 1\right]$, $y = a/2$ bzw. $x = \frac{a}{2\pi}\cdot\lg\left[e^{2\frac{\pi}{v}\cdot k} - 1\right]$, $y = -a/2$ sind Wendepunkte. In der oberen Hälfte $0 \leqq y \leqq +a$ verlaufen diese Kraftlinien für $\frac{a}{2\pi}\cdot\lg\left[e^{2\frac{\pi}{v}\cdot k} - 1\right] < x < \frac{a}{\pi}\cdot\lg[e^{\frac{\pi}{v}\cdot k} + 1]$, $a/2 < y < a$ nach unten konvex, für $\frac{a}{\pi}\cdot\lg[e^{\frac{\pi}{v}\cdot k} - 1] < x < \frac{a}{2\pi}\lg\cdot\left[e^{2\frac{\pi}{v}\cdot k} - 1\right]$, $0 < y < a/2$ nach unten konkav und sind in bezug auf die Parallelen $x = \frac{a}{2\cdot\pi}\cdot\lg\left[e^{2\frac{\pi}{v}\cdot k} - 1\right]$ oder auf $y = a/2$ entgegengesetzt symmetrisch. Hier gilt die Bestimmung

$$0 \leqq \arccos\left[\frac{e^{\pi\cdot\left[\frac{2}{v}\cdot k-\frac{x}{a}\right]}}{2} - \operatorname{Cos}\left[\frac{\pi}{a}\cdot x\right]\right] \leqq +\pi.$$

Entsprechendes gilt für den Verlauf dieser Kraftlinien in der unteren Hälfte $-a \leqq y \leqq 0$ des Parallelstreifens. In hinreichender Nähe des unendlich fernen Randpunktes in der positiven Richtung der reellen Achse kann nach (5) $\psi(x, y) = v/a \cdot x$ gesetzt werden. Das Kraftfeld wird homogen. Die Auflösung der Gleichung der Niveaulinien

$$\frac{v}{\pi}\cdot\left[\frac{\pi}{2\cdot a}\cdot y + \operatorname{arctg}\left[\frac{e^{\pi/a\,.\,x}-1}{e^{\pi/a\,.\,x}+1}\cdot\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2\cdot a}\cdot y\right]\right]\right] = k', \quad [-v \ldots k' \cdot +v]$$

nach y ergibt $y = a/\pi \cdot \arcsin[\sin[\pi/v\,k'] \cdot e^{-\pi/a\,x}] + a/v \cdot k'$. In der oberen Hälfte $0 \leqq y \leqq +a$ des Parallelstreifens wollen wir unter dem Zeichen $\arcsin[\sin[\pi/v \cdot k'] \cdot e^{-\pi/a\,.\,x}]$ diejenigen Zahlen $\pi/a \cdot y - \pi/v \cdot k'$ verstehen, welche die Hauptbedingung $\sin[\pi/a\,y - \pi/v \cdot k'] = \sin[\pi/v \cdot k'] \cdot e^{-\pi/a\,.\,x}$ und die Nebenbedingungen $0 \leqq \pi/a \cdot y - \pi/v \cdot k' \leqq +\pi/2$ bzw. $+\pi/2 \leqq \pi/a \cdot y - \pi/v \cdot k' \leqq +\pi$ erfüllen. In der unteren Hälfte $-a \leqq y \leqq 0$ wollen wir unter diesem Zeichen diejenigen Zahlen $\pi/a \cdot y - \pi/v \cdot k'$ verstehen, welche derselben Hauptbedingung, aber den Nebenbedingungen $-\pi/2 \leqq \pi/a \cdot y - \pi/v\,k' \leqq 0$ beziehungsweise $-\pi \leqq \pi/a \cdot y - \pi/v \cdot k' = -\pi/2$ genügen.

Die analytische Untersuchung dieser Gleichung liefert für den Verlauf der Niveaulinien das Ergebnis:

Die Niveaulinie 0 bildet die x-Achse mit den geradlinigen Seiten $\Pi_{x,y}$ und $III_{x,y}$.

Die Niveaulinien $0 < k' < +v/2$ liegen in der oberen Hälfte $0 \leqq y \leqq +a$ des Parallelstreifens und haben den Punkt $x = 0$, $y = +a$ gemeinsam. Sie verlaufen für $a/\pi \cdot \lg[\sin(\pi/v \cdot k')] \leqq x \leqq 0$ in bezug auf die Parallelen $y = a/2 + a/v \cdot k'$ symmetrisch und zwar für $a/2 + a/v \cdot k' < y \leqq a$ nach unten konkav, für $2 \cdot a/v \cdot k' \leqq y < a/2 + a/v \cdot k'$ nach unten konvex. In den Punkten $x = a/\pi \lg[\sin(\pi/v \cdot k')]$, $y = a/2 + a/v \cdot k'$ haben sie zur y Achse parallele Tangenten Für $x \geqq 0$ verlaufen sie weiter von den Punkten $x = 0$, $y = \frac{2a}{v}\cdot k'$ ausgehend nach unten konvex und nähern sich mit unbegrenzt wachsendem x den Parallelen $y = \frac{a}{v}\cdot k'$ asymptotisch. Im Intervall $a/\pi \cdot \lg[\sin(\pi/v \cdot k')] \leqq x \leqq 0$

gilt für den arc sin die Bestimmung $+\pi/2 \leqq \arcsin[\sin(\pi/v \cdot k') \cdot e^{-\pi/a \cdot x}] < \pi$ bzw. $0 < \arcsin[\sin(\pi/v \cdot k') \cdot e^{-\pi/a \cdot x}] \leqq +\pi/2$, im Intervall $x < 0$ die Bestimmung

$$0 < \arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{v} \cdot k'\right) \cdot e^{-\pi/a \cdot x}\right] < +\frac{\pi}{2}.$$

Die Niveaulinien $v/2 \leqq k' < v$ haben gleichfalls den Punkt $x = 0$, $y = a$ gemeinsam und verlaufen in der oberen Hälfte des Parallelstreifens. Für ihr Intervall $x \geqq 0$ verlaufen sie nach unten konvex und nähern sich mit unbeschränkt zunehmendem x den Parallelen $y = a/v \cdot k'$ asymptotisch. Der arc sin wird definiert durch

$$0 < \arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{v} \cdot k'\right) \cdot e^{-\pi/a \cdot x}\right] < \frac{\pi}{2}.$$

Zwischen den Funktionen dieser Niveaulinien und den Funktionen der Niveaulinien $0 < k' < v/2$ bestehen für $x < 0$ die Beziehungen

$$y(x, v - k') = y(x, k') + a - \frac{2v}{a} \cdot k'.$$

Analoges gilt für die untere Hälfte $-a \leqq y \leqq 0$ des Parallelstreifens. Für $x \gg 0$ kann $\varphi(x, y) = v/a \cdot y$ gesetzt werden.

3. Zeichnung der Kraft- und Niveaulinien. Wir bemerken zuvor, daß der Punktmenge

$$x = \frac{a}{\pi} \cdot \lg\left[\sin\left(\frac{\pi}{v} \cdot k'\right)\right], \quad y = \frac{a}{2} + \frac{a}{v} \cdot k', \quad 0 < k' \leq \frac{v}{2}$$

der x, y-Ebene in der w_1, w_2-Ebene der Halbkreis $(w_1 + 1/2)^2 + w_2^2 = 1/4$ entspricht.

Der kürzeste Weg, bei vorgegebener Breite a das Bild der Kraft- und Niveaulinien zu erhalten, ist folgender:

Wir ziehen zuerst um den Punkt $w_1 = -1/2$, $w_2 = 0$ im zweiten Quadranten der w_1, w_2-Ebene den Halbkreis mit dem Radius $1/2$. Dann zeichnen wir die Kraft- und Niveaulinien in diesem Quadranten und zwar so, wie es in der Abb. 6 geschehen ist. Wir haben also konzentrische Kreisbogen um den Punkt $w_1 = -1$, $w_2 = 0$ zu ziehen, deren Radien r eine passend gewählte geometrische Reihe $r = 1, e^{\pm\delta}, e^{\pm 2\delta}, \ldots$[1]) durchlaufen sollen, und von diesem Punkt ausgehende Halbstrahlen, deren Neigungswinkel φ eine geeignet gewählte arithmetische Reihe

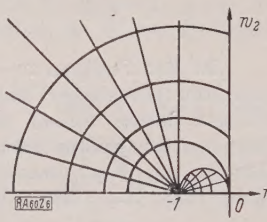

Abb. 6.

$$\varphi = 0, \quad \frac{\pi}{n}, \quad 2 \cdot \frac{\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{n-1}{n}\pi, \quad \pi$$

(n gerade, positive Zahl) bilden sollen.

Dann berechnen wir mittels der Beziehungen $x = a/\pi \cdot \lg \varrho_w$[1]), $y = a/\pi \cdot \vartheta_w$ die Bildpunkte x, y, die den Schnittpunkten und Punkten ϱ_w, ϑ_w der gezeichneten Kraft- und Niveaulinien entsprechen. Beachten wir nun die im Abschnitt 2 erwähnten Ergebnisse, so können wir die Kraft- und Niveaulinien im ganzen Parallelstreifen $-a \leqq y \leqq +a$ zeichnen.

Wir können aber auch fast ohne jede Rechnung das Bild dieser Linien bekommen. Wir zeichnen zuerst die Kraft- und Niveaulinien im ersten und zweiten Quadranten der w_1, w_2-Ebene. Diese beiden Quadranten teilen wir durch die Halbstrahlen ϑ_w durch 0 und konzentrische Halbkreise ϱ_w um 0 in ein Netz hinreichend kleiner Flächenstücke[2]). Vermöge der Beziehungen $x = a/\pi \cdot \lg \varrho_w$, $y = a/\pi \cdot \vartheta_w$ erhalten wir dann eine Einteilung des Parallelstreifens $0 \leqq y \leqq a$ der x, y-Ebene in kleine Rechtecke durch Parallelen zur x- und y-Achse. Dann können wir die im ersten und zweiten Quadranten der w_1, w_2-Ebene liegenden Kraft- und Niveaulinien auf den ganzen Parallelstreifen übertragen[3]).

---

[1]) Die Werte für r und ebenso für $x = a/\pi \cdot \lg \varrho_w$ können wir den »Fünfstelligen Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument« von Hayashi (Vereinigung wissenschaftlicher Verleger) entnehmen. Da der Radius jedes Kreisbogens die mittlere Proportionale zwischen den Radien der beiden benachbarten ist, so lassen sich diese auch geometrisch konstruieren, sobald man die Radien zweier aufeinanderfolgender Kreisbogen als gegeben annimmt.

[2]) Diese Einteilung der w_1, w_2-Ebene kann durch Halbierung der Winkel ϑ_w und Einschaltung neuer konzentrischer Kreise ϱ_w zu beliebiger Kleinheit der Flächenteilchen fortgesetzt werden.

[3]) Bei einer solchen Methode empfiehlt es sich, den beiden Linienscharen, welche die Netzeinteilung hervorbringen, je eine Numerierung zuzuordnen. Durch diese beiden Numerierungen sind dann die Schnittpunkte dieser beiden Linienscharen stets eindeutig bestimmbar, wodurch die Uebertragung der Kraft- und Niveaulinien von einer Ebene auf die andere erleichtert wird.

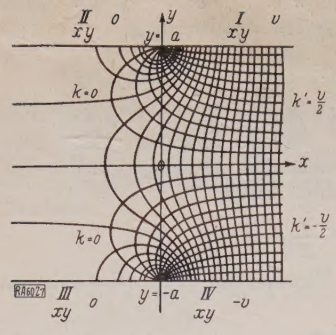

Abb. 7.

Die Verwendung der Gleichung der Kraftlinien und der Gleichung für die Niveaulinien (Abschnitt 2) ergibt noch andere Wege zur Gewinnung dieser Linien.

Abb. 7 zeigt das Bild der berechneten Kraft- und Niveaulinien, wenn $a = \pi$ gewählt ist, und die Differenz zweier aufeinanderfolgender k Werte $v/\pi \cdot 0{,}2$, die zweier aufeianderfolgender k'-Werte $v/\pi \cdot 15^0 = v/\pi \cdot 0{,}2618$.

4. Die Feldstärke, Ausdrücke für die Flächenladung. Für die Komponenten der Feldstärke im Inneren und an den begrenzenden geradlinigen Leitern des elektrostatischen Feldes im Parallelstreifen $-a \leqq y \leqq +a$ der x, y-Ebene, ausschließlich der Punkte $x = 0,\ y = a$ und $x = 0,\ y = -a$ und der unendlich fernen Ecken, ergeben sich die Werte:

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{v}{a} \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{a}\cdot x} \cdot \sin\left[\frac{\pi}{a}\cdot y\right]}{e^{2\cdot\frac{\pi}{a}\cdot x} + 2\cdot e^{\frac{\pi}{a}\cdot x}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{a}\cdot y\right] + 1} \quad \ldots\ldots\ldots (6),$$

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{v}{a} \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{a}\cdot x}\cdot\left[e^{\frac{\pi}{a}\cdot x} + \cos\left(\frac{\pi}{a}\cdot y\right)\right]}{e^{2\cdot\frac{\pi}{a}\cdot x} + 2\cdot e^{\frac{\pi}{a}\cdot x}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{a}\cdot y\right] + 1} \quad \ldots\ldots\ldots (7).$$

In den Punkten $x = 0,\ y = a$ und $x = 0,\ y = -a$ berühren sich zwei geradlinige Leiter und ein ebener Isolator. Die Richtung der Feldstärke wird hier unbestimmt. Ihr absoluter Betrag nimmt bei geeigneter Wahl der Art der Annäherung an diese Punkte Werte an, die größer sind, als jede noch so große positive Zahl. Bei unbegrenzter Annäherung an den unendlich fernen Randpunkt in der positiven Richtung der reellen Achse wird $\mathfrak{E}_{-y} = v/a$. Bewegen wir uns unbegrenzt in der negativen Richtung der x-Achse, so verschwindet $\mathfrak{E}$. Auf der reellen Achse wird $\mathfrak{E}_{-y} = \frac{v}{a} \cdot \frac{1}{1 + e^{-\frac{\pi}{a}x}}$.

Wir diskutieren die Feldstärke an den begrenzenden geradlinigen Leitern. Zuerst betrachten wir den auf das Potential v geladenen Leiter $I_{x,y}$. Die Feldstärke $\mathfrak{E}_{-y}$ wird hier gleich $\frac{v}{a} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}\cdot x}}$. Bei unbegrenzter Annäherung an den Punkt $x = 0,\ y = a$ nimmt sie positive Werte an, die größer sind als jede noch so große positive Zahl. Mit unbegrenzt wachsendem x nähert sie sich beständig abnehmend dem Grenzwert v/a.

An dem auf das Potential 0 gehaltenen Leiter $II_{x,y}$ hat die Feldstärke die positive Richtung der y-Achse und $\mathfrak{E}_{-y}$ wird gleich $\frac{v}{a} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}\cdot x}}$. Nähern wir uns dem Punkt $x = 0,\ y = a$ unbegrenzt, so nimmt sie negative Werte an von beliebig großem absolutem Betrag. Mit unbegrenzt abnehmendem x konvergiert sie beständig zunehmend nach 0. Entsprechendes gilt für die auf die Potentiale $-v, 0$ geladenen Leiter $IV_{x,y}$, $III_{x,y}$.

Für die an dem Flächenstück $b \leqq x \leqq c,\ y = a,\ d \leqq z \leqq e,\ (b > 0)$ angehäufte positive Ladung erhalten wir den Ausdruck

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{v}{a} \cdot [e - d] \cdot \left([c - b] + \frac{a}{\pi} \cdot \lg\left[\frac{1 - e^{-\frac{\pi}{a}\cdot c}}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}\cdot b}}\right]\right) \quad \ldots\ldots (8)$$

und für $c \gg 0$

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{v}{a} \cdot [e - d] \cdot \left([c - b] - \frac{a}{\pi} \cdot \lg\left[1 - e^{-\frac{\pi}{a}\cdot b}\right]\right) \quad \ldots\ldots (9).$$

5. Die Randwirkung des „Ersten Feldes" auf ein Elektron, der Vergleich mit der Helmholtzschen Lösung. Wir denken uns jetzt ein Elektron, welches mit konstanter, in die negative Richtung der reellen Achse weisender Anfangsgeschwindigkeit

q auf dieser in das Feld eintritt, und bestimmen die Ablenkung, welche von dem inhomogenen Teil des Feldes auf das Elektron ausgeübt wird. Im vorliegenden Fall wird der Wert dieser Randwirkung, wie man ableitet, durch den Ausdruck

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x\to\infty} = \frac{e}{m}\cdot\frac{1}{q^2}\int_c^{-\infty} \mathfrak{E}_{-y}\,dx$$

bestimmt, sofern die Winkel-Ablenkung klein bleibt, was beim Versuch stets der Fall ist.

Für das Integral ($c \gg 0$) erhalten wir $-\frac{v}{a}\cdot c$.

Aus dem Bild der Kraft- und Niveaulinien (Abb. 7) erkennen wir, daß wir schon für $x = a$ das Feld mit großer Annäherung als homogen ansehen dürfen. Die Abweichung von der Homogenität des Feldes beträgt nach (5) für $x = a$ und $y = 0$ bis auf einen Faktor v

$$\frac{e^{-\pi}}{\pi} = 0{,}014.$$

Das ist ein hinreichend kleiner Wert. Der Wert der Ablenkung wird dann

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x\to-\infty} = -\frac{e}{m}\cdot\frac{v}{q^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Wir bestimmen nun den Einfluß des Randes auf ein Elektron für einen von Helmholtz behandelten Kondensator (Abb. 3)[1]).

Zuerst denken wir uns die beiden Kondensatorplatten in der negativen Richtung der reellen Achse bis in das Unendliche ausgedehnt, wie es auch Helmholtz getan hat. Bedeutet φ die Potentialfunktion, ψ die zu ihr konjugierte Funktion, so lautet die Lösung von Helmholtz

$$x = \frac{a}{\pi}\cdot\left[1 + \frac{\pi}{v}\cdot\psi + e^{\frac{\pi}{v}\cdot\psi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{v}\cdot\varphi\right)\right], \qquad y = \frac{a}{\pi}\cdot\left[\frac{\pi}{v}\cdot\varphi + e^{\frac{\pi}{v}\cdot\psi}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{v}\cdot\varphi\right)\right] \quad (11).$$

Nimmt hierin ψ unbegrenzt ab, so müssen die zugehörigen x-Werte, wie man aus der ersten Gleichung erkennt, ebenfalls unbegrenzt abnehmen. Für x gilt dies auch dann, wenn ψ unbeschränkt wächst und $\varphi = \pm v$ gesetzt wird. Wählen wir $\varphi = 0$, so müssen bei unbeschränkt wachsendem ψ die zugehörigen x-Werte gleichfalls unbegrenzt zunehmen. Den Werten $\psi = 0$, $\varphi = \pm v$ entspricht der Wert $x = 0$, $y = \pm a$, den Werten $\psi = 0$, $\varphi = 0$ der Wert $x = 2\cdot a/\pi$. Wir erkennen, daß für diesen Fall die Berechnung der Randwirkung auf ein Elektron keinen endlichen Wert mehr ergibt.

Um einen endlichen Wert für die Randwirkung zu erhalten, denken wir uns die beiden Kondensatorplatten auch in der negativen Richtung der reellen Achse endlich ausgedehnt. Es genügt, wenn wir für die Länge $20\cdot a$ wählen. Bei der Berechnung des Integrals $\int_c^{\infty} \mathfrak{E}_{-y}\,dx$ müssen wir soweit in den Kondensator hineingehen, daß die Abweichung vom homogenen Feld den oben bestimmten Wert $v\cdot\frac{e^{-\pi}}{\pi}$ nicht übersteigt. Sonst könnten wir hernach keinen vernünftigen Vergleich zwischen den Größen der Randwirkungen anstellen. Es muß also sein

$$e^{\frac{\pi}{v}\cdot\psi} = e^{-\pi}, \qquad \psi = -v, \qquad c = -a\cdot 0{,}668.$$

Dann haben wir noch den positiven ψ-Wert zu ermitteln, der den Werten $x = -10\cdot a$, $\varphi = \pm v$ entspricht. Setzen wir angenähert $x = -\frac{a}{\pi}\cdot e^{\frac{\pi}{v}\cdot\psi}$, so wird $\psi = \frac{v}{\pi}\cdot\lg(10\cdot\pi)$. Der Einfluß des Randes auf ein Elektron hat dann für diesen Fall die Größe

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x\to\infty} = \frac{e}{m}\cdot\frac{v}{q^2}\cdot 2{,}097 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Auch bei endlicher Länge der Kondensatorplatten bleibt die Randwirkung größer als in unserem Fall.

---

[1]) Diese Untersuchung findet man in seinen Vorlesungen über Elektrodynamik und Theorie des Magnetismus, herausgegeben von Otto Krigar-Menzel und Max von Laue (Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig).

Zweites Feld (Abb. 2).

1. Die Ermittlung der Abbildungsfunktion der aufgeschlitzten w_1, w_2-Ebene auf den kreuzförmigen Streifen der x, y-Ebene[1][2]. Der Schwarz-Christoffelschen Formel gemäß liefert die Funktion

$$x + iy = C \cdot \int_0^q \frac{dq}{q^{3/4} \cdot [1-q]} \quad [q^{3/4} = \varrho_q^{3/4} \cdot e^{i \cdot 3/4 \cdot \vartheta_q}, \quad 0 \leqq \vartheta_q \leqq +\pi, \quad C \text{ positiv reell}]$$

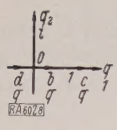

Abb. 8.

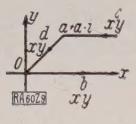

Abb. 9.

die konforme Abbildung der Halbebene $J(q) \geqq 0$ (Abb. 8) auf das in Abb 9 dargestellte Dreieck der x, y-Ebene. Den auf der reellen Achse der q-Ebene liegenden Punkten 0, 1 und dem unendlich fernen Punkte entsprechen dabei die Eckpunkte des Dreiecks mit den zugehörigen Außenwinkeln $3 \cdot \pi/4, \pi, \pi/4$. Die Abbildung ist umkehrbar eindeutig und konform ausschließlich der drei ausgezeichneten Randpunkte.

C bestimmen wir aus der Breite a des Dreiecks durch Integration von $\frac{C}{q^{3/4} \cdot (1-q)}$ über einen kleinen Halbkreis um $q = 1$ mit nach Null konvergierendem Radius und erhalten $C = \frac{a}{\pi}$.

Wir rationalisieren das Integral

$$x + iy = \frac{a}{\pi} \cdot \int_0^q \frac{q^{1/4}}{q \cdot [1-q]} \, dq$$

durch Substitution von $q = p^4$ und bekommen schließlich

$$x + iy = \frac{a}{\pi} \cdot \left[\log \left(\frac{1 + q^{1/4}}{1 - q^{1/4}} \right) + \frac{1}{i} \cdot \log \left(\frac{1 + i\, q^{1/4}}{1 - i \cdot q^{1/4}} \right) \right]$$

Spiegeln wir nun in bezug auf das Geradenstück $d_{x,y}$ bzw. d_q, setzen $q = u^2$, so liefert die durch analytische Fortsetzung eindeutig bestimmte Funktion

$$x + i \cdot y = 2 \cdot \frac{a}{\pi} \cdot \int_0^u \frac{du}{u^{1/2} \cdot [1 - u^2]} = \frac{2 \cdot a}{\pi} \left[\log \left(\frac{1 + u^{1/2}}{1 - u^{1/2}} \right) + \frac{1}{i} \cdot \log \left(\frac{1 + i \cdot u^{1/2}}{1 - i \cdot u^{1/2}} \right) \right]$$

die konforme Abbildung der Halbebene $J(u) \geqq 0$ auf den nun entstandenen Schenkel der x, y-Ebene. Die Zuordnung der Randlinien zeigen die Abb. 10 und 11.

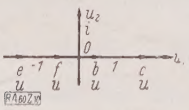

Abb. 10.

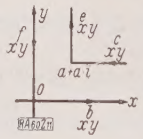

Abb. 11.

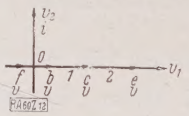

Abb. 12.

Durch $u = \frac{v}{2-v}$ erhalten wir die konforme Abbildung der Halbebene $J(v) \geqq 0$ auf die Halbebene $J(u) \geqq 0$, welche die Randlinien b_v, c_v, e_v, f_v in die Randlinien b_u, c_u, e_u, f_u überführt. (Abb. 10, 12).

Dann bildet

$$x + i \cdot y = \frac{a}{\pi} \cdot \int_0^v \frac{dv}{(1-v) \cdot \sqrt{\frac{v}{2-v}}} = \frac{a}{\pi} \left[\log \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{v}{2-v}}}{1 - \sqrt{\frac{v}{2-v}}} \right) + \frac{1}{i} \cdot \log \left(\frac{1 + i \sqrt{\frac{v}{2-v}}}{1 - i \sqrt{\frac{v}{2-v}}} \right) \right]$$

---

[1] Abb. 13, 14.

[2] Fußnote Abschnitt 1, erstes Feld.

die Halbebene $J(v) \geqq 0$ konform auf den Schenkel der x, y-Ebene ab. Spiegeln wir jetzt an den Geradenstücken $f_{x,y}$, f_v, setzen wir $v = w^2$, und wenden wir dann noch einmal das Spiegelung-prinzip auf die nun erhaltenen sich entsprechenden reellen Achsen der x, y- und w-Ebene an, so liefert die durch analytische Fortsetzungen eindeutig definierte Abbildungsfunktion

$$x + iy = \frac{2 \cdot a}{\pi} \int_0^w \frac{\sqrt{2 - w^2}}{1 - w^2}\, dw = \frac{a}{\pi} \cdot \left[\log \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{w^2}{2 - w^2}}}{1 - \sqrt{\frac{w^2}{2 - w^2}}} \right) + \frac{1}{i} \cdot \log \left(\frac{1 + i\sqrt{\frac{w^2}{2 - w^2}}}{1 - i\sqrt{\frac{w^2}{2 - w^2}}} \right) \right] \quad (13)$$

die gewünschte konforme Abbildung der aufgeschlitzten w-Ebene auf den kreuzförmigen Streifen der $x\ y$-Ebene (Abb. 13, 14). Sie ist umkehrbar eindeutig und konform mit Ausnahme der acht ausgezeichneten Randpunkte und bezüglich der Achsen beider Ebenen symmetrisch.

Zur Bestimmung der in (13) auftretenden Wurzeln und logaritbmischen Ausdrücke betrachten wir die Abbildungen $u = \frac{w^2}{2 - w^2}$, $p = \sqrt{u}$, $s = \frac{1 + p}{1 - p}$, $t = \frac{1 + i \cdot p}{1 - i \cdot p}$, $f = a/\pi \cdot \log s$ und $g = a/\pi \cdot \frac{1}{i} \log t$

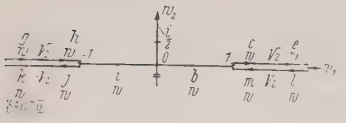

Abb. 13.

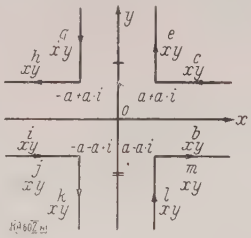

Abb. 14.

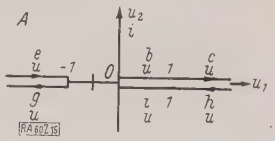

Abb. 15.

$u = \frac{w^2}{2 - w^2}$ bildet die Halbebene $J(w) \geqq 0$ auf das Exemplar A, die Halbebene $J(w) \leqq 0$ auf das Exemplar B der u-Ebene ab. (Abb. 15, 16).

Durch $p = \sqrt{u}$ wird dann die aus A^+ und B^+ bestehende aufgeschlitzte, zweiblättrige Fläche auf die ganze p Ebene abgebildet (Abb. 17). Es gilt also

$$p = \varrho_u^{1/2} \cdot e^{i\frac{\vartheta_u}{2}}, \quad 0 \leqq \vartheta_u \leqq +2 \cdot \pi \text{ für das Exemplar A,}$$

$$p = \varrho_u^{1/2} \cdot e^{i \cdot \left[\frac{\vartheta_u}{2} + \pi\right]}, \quad 0 \leqq \vartheta_u \leqq +2 \cdot \pi \text{ für das Exemplar B.}$$

Die Funktion $s = \frac{1 + p}{1 - p}$ führt die Halbebene $J(p) \geqq 0$ in die Halbebene $J(s) \geqq 0$, die Halbebene $J(p) \leqq 0$ in die Halbebene $J(s) \leqq 0$ über. (Abb. 17, 18).

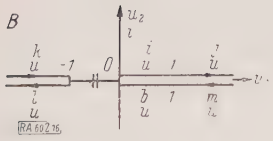

Abb. 16.

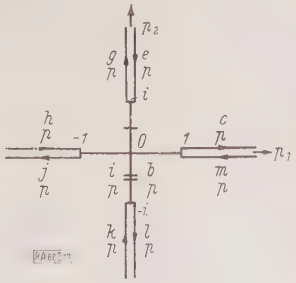

Abb. 17.

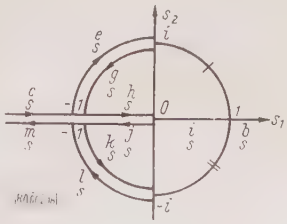

Abb. 18.

$t = \frac{1 + i \cdot p}{1 - i \cdot p}$ ergibt die Abbildung der Halbebene $J(p) > 0$ auf das Innere des Einheitskreises der t-Ebene, der Halbebene $J(p) < 0$ auf das Aeußere desselben (Abb. 17, 19).

Die s-Ebene wird durch

$$f = \frac{a}{\pi} \cdot \log s = \frac{a}{\pi} \cdot [\log \varrho + i\,\vartheta_s], \qquad -\pi \leqq \vartheta_s \leqq +\pi$$

auf den in Abb. 20 dargestellten aufgeschlitzten Parallelstreifen abgebildet, die t-Ebene mittelst

$$g = \frac{a}{\pi}\,\frac{1}{i} \cdot \log t = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{i} \cdot [\log r_t + i \cdot \vartheta_t], \qquad -\pi \leqq \vartheta_t \leqq +\pi$$

auf den aufgeschlitzten Parallelstreifen in Abb. 21.

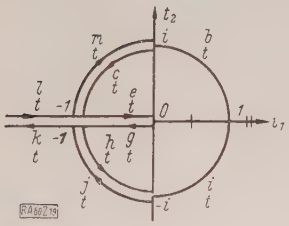

Abb. 19.

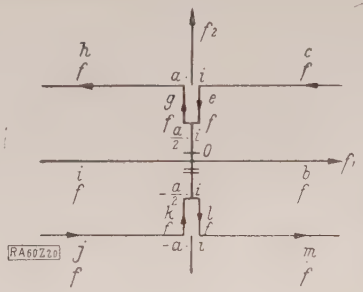

Abb. 20.

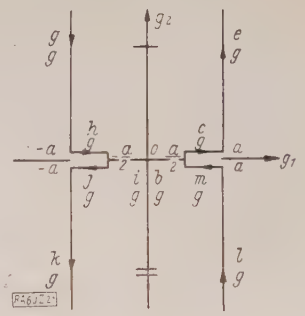

Abb. 21.

Durchläuft nun w die den Schlitz der w-Ebene bildenden Geradenstücke im Sinne der in Abb. 13 durch Pfeile angezeigten Richtung, so durchläuft die aus obigen Abbildungen entstehende Bildgröße $x + i \cdot y = f + g$ die entsprechenden, den Rand des kreuzförmigen Streifens der x, y Ebene bildenden Geradenstücke im gleichen Sinne (Abb. 14). Die verlangte konforme Abbildung durch die obige Funktion (13) wird also erhalten, wenn für die vorkommenden Wurzeln und logarithmischen Ausdrücke die näheren Bestimmungen

$$\sqrt{\frac{w^2}{2-w^2}} = \varrho_u^{1/2} \cdot e^{i \cdot \frac{\vartheta_u}{2}}, \qquad 0 \leqq \vartheta_u \leqq +2\cdot\pi \text{ für die Halbebene } J(w) \geqq 0;$$

$$\sqrt{\frac{w^2}{2-w^2}} = \varrho_u^{1/2} \cdot e^{i \cdot \left[\frac{\vartheta_u}{2} + \pi\right]}, \qquad 0 \leqq \vartheta_u \leqq +2\cdot\pi \text{ für die Halbebene } J(w) \leqq 0;$$

$$\log\left[\frac{1 + \sqrt{\frac{w^2}{2-w^2}}}{1 - \sqrt{\frac{w^2}{2-w^2}}}\right] = \lg \varrho_s + i \cdot \vartheta_s, \qquad -\pi \leqq \vartheta_s \leqq +\pi;$$

$$\log\left[\frac{1 + i\sqrt{\frac{w^2}{2-w^2}}}{1 - i\sqrt{\frac{w^2}{2-w^2}}}\right] = \lg \varrho_t + i \cdot \vartheta_t, \qquad -\pi \leqq \vartheta_t \leqq +\pi$$

getroffen werden. Die Auswertung dieser Abbildungsfunktion ergibt für die numerische Auffindung eines Wertepaares $x\ y$, welches einem vorgegebenen Wertepaar ϱ_w, ϑ_w entspricht, die folgenden Bestimmungen:

$$\vartheta_u = \operatorname{arctg}\left[\frac{2 \sin [2 \cdot \vartheta_w]}{2 \cos [2 \cdot \vartheta_w] - \varrho_w^2}\right];$$

hierbei lassen die Vorzeichen von

$$2 \sin [2\,\vartheta_w] \text{ und } 2 \cdot \cos [2\,\vartheta_w] - \varrho_w^2$$

zunächst die Lage des Winkels innerhalb der vier Quadranten erkennen, dann vollendet die Gleichung

$$\operatorname{tg} \vartheta_u = \frac{2 \sin [2\,\vartheta_w]}{2 \cdot \cos [2 \cdot \vartheta_w] - \varrho_w^2}$$

und die Bedingung $0 \leqq \vartheta_u \leqq +2\cdot\pi$ (Abb. 15, 16) die Bestimmung; (15)

$$\vartheta_p = \frac{\vartheta_u}{2} \quad \text{bzw.} \quad = \frac{\vartheta_u}{2} + \pi,$$

je nachdem sich $P(\varrho_w, \vartheta_w)$ in der Halbebene $J(w) \geqq 0$ oder $J(w) \leqq 0$ befindet (Abb. 13); (16);

$$\varrho_p = \frac{\varrho_w}{\sqrt[4]{\varrho_w^4 - 4 \cdot \varrho_w^2 \cdot \cos[2 \cdot \vartheta_w] + 4}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17);$$

die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1 + \varrho_p^2 + 2\,\varrho_p \cdot \sin \vartheta_p, \qquad \gamma = (1 - \varrho_p)^2 + (2\,\varrho_p \cdot \sin \vartheta_p)^2 \\ \beta &= 1 + \varrho_p^2 - 2\,\varrho_p \cdot \cos \vartheta_p, \qquad \delta = (1 - \varrho_p)^2 + (2\,\varrho_p \cdot \cos \vartheta_p)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (18)$$

und ihre Logarithmen:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_s &= \operatorname{arctg}\left[\frac{2 \cdot \varrho_p \cdot \sin \vartheta_p}{1 - \varrho_p^2}\right], \qquad -\pi \leqq \vartheta_s \leqq +\pi \text{ (Abb. 18)} \\ \vartheta_t &= \operatorname{arctg}\left[\frac{2\,\varrho_p \cdot \cos \vartheta_p}{1 - \varrho_p^2}\right], \qquad -\pi \leqq \vartheta_t \leqq +\pi \text{ (Abb. 19)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (19);$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{\pi}\,[{}^1\!/_2 \cdot \lg \gamma - \lg \beta + \vartheta_t], \qquad y = \frac{a}{\pi}\,[\lg \alpha - {}^1\!/_2 \lg \delta + \vartheta_s]\ ^{1}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (20).$$

Aus der Integraldarstellung der Abbildungsfunktion gewinnt man Reihenentwicklungen, die in eindeutig bestimmten Umgebungen der acht singulären Punkte der aufgeschlitzten w-Ebene, abgesehen von diesen Punkten, analytisch sind. Der Konvergenzradius der im Endlichen liegenden singulären Stellen hat den Wert $\sqrt{2} - 1$, der beiden unendlich fernen Ecken den Wert $\sqrt{2}$.

Ihre Umkehrungen sind analytisch in den Umgebungen des kreuzförmigen Streifens der x, y Ebene. Die Konvergenzradien bzw. Konvergenzbereiche der unendlich fernen Ecken sind $2\,a$ bzw. $|x| > a, -a \leqq y \leqq +a$, und $|y| > a, -a \leqq x \leqq +a$.

Die Entwicklung in der Umgebung des Nullpunktes der w-Ebene gestattet eine genaue Fehlerabschätzung bei Beschränkung auf eine endliche Anzahl von Gliedern. Der Kürze halber begnügen wir uns mit dieser Mitteilung.

2. Reihenentwicklungen der zueinander konjugierten Potentialfunktionen $\psi(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ des elektrostatischen Feldes im kreuzförmigen Streifen der x, y-Ebene. Wir entnehmen für ein elektrostatisches Feld in unserer aufgeschlitzten w-Ebene mit den der Abbildung entsprechenden Randwerten aus **1** (Erstes Feld) den Ausdruck

$$\frac{v}{2 \cdot \pi} \cdot \lg\left[\varrho_w^2 + 2\,\varrho_w \cdot \cos \vartheta_w + 1\right] + i \cdot \frac{v}{\pi} \cdot \left[\frac{\vartheta_w}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho_w - 1}{\varrho_w + 1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\vartheta_w}{2}\right)\right] = \frac{v}{\pi} \cdot \log[w + 1],$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \operatorname{arctg}\left[\frac{\varrho_w - 1}{\varrho_w + 1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\vartheta_w}{2}\right] \leqq +\frac{\pi}{2}, \qquad [-\pi \leqq \vartheta_w \leqq +\pi].$$

Dann ist

$$\psi(x, y) + i \cdot \varphi(x, y) = \frac{v}{\pi} \cdot \log[w(x + i\,y) + 1] \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

diejenige im kreuzförmigen Streifen der $x\ y$ Ebene, einschließlich des Randes mit Ausnahme der acht Eckpunkte, analytische Funktion, deren imaginärer Teil die Lösung der ersten Randwertaufgabe für das hierin befindliche elektrostatische Feld liefert.

Für die Umgebung $|x + i \cdot y| < a \cdot \sqrt{2}$ erhalten wir die Darstellung

$$\psi(x, y) + i \cdot \varphi(x, y) = \frac{v}{\pi} \cdot \left[q - \frac{1}{2} \cdot q^2 + \frac{1}{12} \cdot q^3 - \frac{1}{160} \cdot q^5 + \ldots\right] \quad \ldots \quad (22),$$

wobei zur Abkürzung $q = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot [x + i \cdot y]$ gesetzt ist.

Im Halbstreifen $x > a, -a \leqq y \leqq +a$, den unendlich fernen Randpunkt ausgenommen, gilt der analytische Ausdruck

$$\psi(x\ y) + i \cdot \varphi(x, y) = \frac{v}{\pi} \cdot \left[\lg 2 - \frac{1}{2} \cdot q + \frac{5}{8} \cdot q^2 - \frac{17}{12} \cdot q^3 + \frac{775}{192} \cdot q^4 + \ldots\right] \quad (23),$$

hier ist $q = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{\pi}{a} \cdot [x + i \cdot y]}$ gesetzt, im Halbstreifen $x < -a, -a \leqq y \leqq +a$, ausschließlich des unendlich fernen Punktes gilt

$$\psi(x, y) + i \cdot \varphi(x, y) = \frac{v}{2} + \frac{v}{a} \cdot (x + i \cdot y) + \frac{v}{\pi} \cdot \left[-\frac{3}{2} \cdot q + \frac{19}{8} \cdot q^2 - \frac{71}{12} \cdot q^3 + \ldots\right] \quad (24),$$

$q = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{a} \cdot [x + i \cdot y]}$.

[1]) Tabellen: Siehe Fußnote 1, Abschn. 3, erstes Feld und »Vollständige Tafeln der Quadrate aller Zahlen bis 100009« von Ludwig Zimmermann (R. Reiß, Liebenwerda).

Weiter erhalten wir

$$\psi(x,y)+i\cdot\varphi(x,y)=\frac{v}{\pi}\cdot\left[\lg[\sqrt{2}+1]-[\sqrt{2}-1]\cdot q+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot q^2-\frac{8\cdot\sqrt{2}-1}{84}\cdot q^3-\frac{\sqrt{2}}{224}\cdot q^4+\ldots\right] \quad (25)$$

mit der Bestimmung

$$q=\left[\frac{\pi}{a}\cdot\frac{3}{16}\cdot\sqrt{4\cdot\sqrt{2}}\right]^{2/3}\cdot[x+i\cdot y-(a+a\cdot i)]^{2/3}=\left[\frac{\pi}{a}\cdot\frac{3}{16}\cdot\sqrt{4\cdot\sqrt{2}}\right]^{2/3}\cdot\varrho_1^{2/3}\cdot e^{i\cdot\frac{2}{3}\cdot\vartheta_1}$$

analytisch im Bereich $0<\varrho_1<2\cdot a$, $-3\cdot\pi/2\leqq\vartheta_1\leqq 0$. Ersetzen wir in diesem Ausdruck $a\cdot i$ durch $-a\cdot i$, so gelangen wir zu der Entwicklung in der Umgebung des Punktes $a-a\cdot i$ mit der Bestimmung

$$[x+i\cdot y-(a-a\cdot i)]^{2/3}=\varrho_2^{2/3}\cdot e^{i\cdot\frac{2}{3}\cdot\vartheta_2},\qquad 0<\varrho_2<2\cdot a,\ 0\leqq\vartheta_2\leqq 3\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned}\psi(x,y)+i\cdot\varphi(x,y)=\frac{v}{\pi}\cdot\Big[&\lg[\sqrt{2}-1]+\pi\cdot i-[\sqrt{2}+1]\cdot q-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}\,q^2-\\&-\frac{8\sqrt{2}+1}{84}\cdot q^3+\frac{\sqrt{2}}{224}\cdot q^4+\ldots\Big]\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

mit der Bestimmung

$$q=\left[\frac{\pi}{a}\cdot\frac{3}{16}\cdot\sqrt{4\cdot\sqrt{2}}\right]^{2/3}\cdot[x+i\cdot y-(-a+a\cdot i)]^{2/3}=\left[\frac{\pi}{a}\cdot\frac{3}{16}\cdot\sqrt{4\cdot\sqrt{2}}\right]^{2/3}\cdot\varrho_3^{2/3}\cdot e^{i\cdot\frac{2}{3}[\vartheta_3+4\pi]}$$

analytisch in der Umgebung $0<\varrho_3<2\cdot a$, $-\pi\leqq\vartheta_3\leqq\pi/2$. Wird in diesem Ausdruck $a\cdot i$ durch $-a\cdot i$, $\pi\cdot i$ durch $-\pi\cdot i$ ersetzt, so gewinnen wir die Darstellung in der Umgebung von $-a-a\cdot i$ mit der Bestimmung $[x+i\cdot y-(-a-a\cdot i)]^{2/3}=\varrho_4^{2/3}\cdot e^{i\cdot\frac{2}{3}\cdot[\vartheta_4+2\cdot\pi]}$

$$0<\varrho_4<2\cdot a,\ -\pi/2\leqq\vartheta_4\leqq\pi.$$

Im Halbstreifen $-a\leqq x\leqq+a$, $y>a$, ausgenommen den unendlich fernen Eckpunkt, ist

$$\left.\begin{aligned}\psi(x,y)+i\cdot\varphi(x,y)=-\frac{v}{\pi}\cdot\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\lg 2\right]+i\cdot\frac{v}{2}-\frac{v}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot i[x+i\cdot y]+\\+\frac{v}{\pi}\cdot\left[q-\frac{1}{2}\cdot q^2+\frac{1}{3}\cdot q^3-\frac{3}{8}\cdot q^4+\ldots\right]\end{aligned}\right\} \quad (27),$$

$$q=-i\cdot e^{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\lg 2}\cdot e^{-\frac{\pi}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot i\cdot[x+i\cdot y]}.$$

analytisch.

Die Entwicklung im Halbstreifen $-a\leqq x\leqq+a$, $y<-a$ mit Ausnahme des unendlich fernen Randpunktes bekommen wir, wenn in (27) für $\frac{i\cdot v}{2}-\frac{v}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot i(x+i\cdot y)$ der entgegengesetzte Wert genommen wird und für den zu potenzierenden Ausdruck die Größe

$$q=i\cdot e^{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\lg 2}\cdot e^{-\frac{\pi}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot i\cdot[x+i\cdot y]}$$

3. Die Kraft- und Niveaulinien. Aus dem Verlauf der Kraft- und Niveaulinien im elektrostatischen Feld unserer aufgeschlitzten w-Ebene[1]) mit den der Abbildung entsprechenden Randwerten entnehmen wir für den allgemeinen Verlauf dieser Linien im elektrostatischen Feld des kreuzförmigen Streifens der x,y Ebene[1]) folgendes[2]):

Bezüglich der x-Achse besteht Symmetrie. Die Kraftlinien $k<v/\pi\cdot\lg(\sqrt{2}-1)$, beginnen auf dem gradlinigen Leiter $h_{x,y}$, schneiden die negative Hälfte der x Achse senkrecht und endigen auf dem geradlinigen Leiter $j_{x,y}$. Die Linie, für welche k kleiner ist als jede noch so kleine negative Zahl, schrumpft auf den unendlich fernen Randpunkt in der negativen Richtung der reellen Achse zusammen.

In hinreichender Nähe dieses Randpunktes kann nach (24)

$$\psi(x,y)=\frac{v}{2}+\frac{v}{a}\cdot x,\qquad \varphi(x,y)=\frac{v}{a}\cdot y$$

geschrieben werden. Das Kraftfeld wird homogen.

[1]) Die begrenzenden geradlinigen Leiter seien ebenso wie die Geradenstücke benannt.

[2]) Die Parameter k und k' sollen hier die gleiche Bedeutung wie beim ersten Feld haben.

Die Kraftlinie $k = v/\pi \cdot \lg(\sqrt{2}-1)$ verläßt den Punkt $x=-a$, $y=a$ unter dem Winkel $-\pi/4$ [1]), schneidet die negative Hälfte der x-Achse senkrecht und endigt im Punkte $x=-a$, $y=-a$ unter dem entsprechenden Winkel $-3\cdot\pi/4$ (Abb. 23).

Für eine hinreichend kleine Umgebung des Eckpunktes $x=-a$, $y=a$ bekommen wir aus (26)

$$k=\frac{v}{\pi}\cdot\left\{\lg[\sqrt{2}-1]-[\sqrt{2}+1]\cdot\left[\frac{\pi}{a}\cdot\frac{3}{16}\cdot\sqrt{4\cdot\sqrt{2}}\right]^{2/3}\cdot\varrho_3^{2/3}\cdot\cos\left[\frac{2}{3}(\vartheta_3+4\pi)\right]\right\}$$

als Gleichungen der Kraftlinien und

$$k'=v-\frac{v}{\pi}\cdot[\sqrt{2}+1]\cdot\left[\frac{\pi}{a}\cdot\frac{3}{16}\cdot\sqrt{4\cdot\sqrt{2}}\right]^{2/3}\cdot\varrho_3^{2/3}\cdot\sin\left[\frac{2}{3}(\vartheta_3+4\pi)\right]$$

als Gleichung der Niveaulinien.

Auch aus ihnen folgt der symmetrische Verlauf der Kraft- und Niveaulinien bezüglich der Achse eines geeigneten Polarkoordinatensystems in jener Umgebung. Entsprechendes gilt für den Punkt $x=-a$, $y=-a$.

Die von dem geradlinigen Leiter $g_{x,y}$ ausgehenden Kraftlinien $v/\pi\cdot\lg[\sqrt{2}-1] < k < v/\pi\cdot\lg 2$ schneiden die x-Achse senkrecht und finden ihr Ende auf dem geradlinigen Leiter $k_{x,y}$.

Die Linien $k<0$ haben mit der y-Achse keinen Punkt gemeinsam. Die Linien $0<k<v/\pi\cdot\lg 2$ schneiden die y-Achse in zwei symmetrisch zueinander liegenden Punkten. Die durch den Nullpunkt gehende Kraftlinie $k=0$ bildet die Grenze zwischen diesen Linien und liegt im übrigen ganz in der linken Hälfte des Feldes.

In hinreichender Nähe des Nullpunktes gilt nach (22)

$$\frac{\left[x-\frac{a}{\pi}\cdot 2\sqrt{2}\right]^2}{8\cdot\frac{a^2}{\pi^2}\cdot\left[1-2\frac{\pi}{v}\cdot k\right]}-\frac{y^2}{8\cdot\frac{a^2}{\pi^2}\cdot\left[1-2\frac{\pi}{v}\cdot k\right]}-1=0,\quad 1-2\cdot\frac{\pi}{v}\cdot k>0$$

für die Kraftlinien, und

$$\frac{\left[x'-2\cdot\frac{a}{\pi}\right]^2}{16\cdot\frac{a^2}{\pi\cdot v}\cdot k'}-\frac{\left[y'+2\cdot\frac{a}{\pi}\right]^2}{16\cdot\frac{a^2}{\pi\cdot v}\cdot k'}+1=0,\qquad k'>0,$$

$$\frac{\left[x'-2\cdot\frac{a}{\pi}\right]^2}{\left[-16\cdot\frac{a^2}{\pi\cdot v}\cdot k'\right]}-\frac{\left[y'+2\cdot\frac{a}{\pi}\right]^2}{\left[-16\cdot\frac{a^2}{\pi\cdot v}\cdot k'\right]}-1=0,\qquad k'<0$$

für die Niveaulinien, wobei sich x' und y' auf ein gegen das ursprüngliche System x, y um den positiven Winkel $\pi/4$ gedrehtes gleichartiges rechtwinkliges System $x'\,y'$ beziehen. In jener Nähe sind also diese Linien Teile gleichseitiger Hyperbeln mit gemeinsamem Mittelpunkt $x=a/\pi\cdot 2\cdot\sqrt{2}$, deren Lage die Abb. 22 skizzenhaft andeutet. Die Asymptoten $y=x-a/\pi\cdot 2\sqrt{2}$, $y=-(x-a/\pi\cdot 2\sqrt{2})$ liegen nicht mehr in dieser Umgebung.

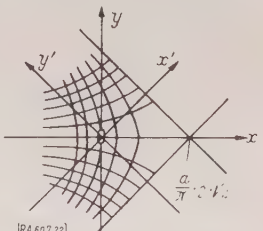

Abb. 22 (Skizze).

Die Kraftlinien $k \gtrless v/\pi\cdot\lg 2$ treten paarweise auf, einmal in der oberen Hälfte ($y\geqq 0$) und einmal in der unteren Hälfte ($y\leqq 0$) des Feldes.

Aus der Abb. 23 ersieht man das Verhalten der vom geradlinigen Leiter $g_{x,y}$ ausgehenden Kraftlinie $k=v/\pi\cdot\lg 2$. Sie schneidet die positive Hälfte der y-Achse und nähert sich mit unbegrenzt wachsendem x der Parallelen $y=a/2$ asymptotisch. Für $v/\pi\cdot\lg 2 < k < v/\pi\cdot\lg(\sqrt{2}+1)$ beginnen für die obere Hälfte des Feldes diese Linien auf dem geradlinigen Leiter $g_{x,y}$. Sie schneiden die positive Hälfte der y Achse, biegen um den Punkt $x=a$, $y=a$ und endigen auf dem geradlinigen Leiter $c_{x,y}$.

Im Punkte $x=a$, $y=a$ endigt unter dem Winkel $\pi/4$ [2]) ein Exemplar der Kraftlinie $k=v/\pi\cdot\lg(\sqrt{2}+1)$, die von der positiven Hälfte der y-Achse geschnitten wird und vom geradlinigen Leiter $g_{x,y}$ ausgeht (Abb. 23).

---

[1]) Gemessen in der positiven Richtung der Kraftlinie gegen die positive Richtung der x-Achse.

[2]) Vergl. die vorangehende Fußnote.

In hinreichend kleiner Umgebung von $x = a$, $y = a$ gilt für die Kraft- und Niveaulinien Entsprechendes wie in einer solchen Umgebung des Punktes $x = -a$, $y = a$. Hier herrscht wieder Symmetrie.

Die Kraftlinien $k > v/\pi \cdot \lg(\sqrt{2}+1)$ gehen vom geradlinigen Leiter $g_{x,y}$ zum geradlinigen Leiter $e_{x,y}$.

Entfernen wir uns in der positiven Richtung der y-Achse vom Nullpunkt, so wird das Feld immer homogener. Für $-a \leqq x \leqq +a$, $y \gg 0$ dürfen wir nach (27)

$$\psi[x,y] = -\frac{v}{\pi}\cdot\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\lg 2\right]+\frac{v}{a}\cdot\frac{1}{2}y, \qquad \varphi[x,y] = \frac{v}{2}-\frac{v}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot x$$

schreiben.

Mit dem unendlich fernen Randpunkt fällt ein Exemplar der Kraftlinie k zusammen, für das k größer als jede noch so große positive Zahl ist. Für die untere Hälfte des Feldes folgt Entsprechendes über die Kraftlinien $k \geqq v/\pi \cdot \lg 2$.

Alle Niveaulinien haben den unendlich fernen Randpunkt in der negativen Richtung der x-Achse gemeinsam. Die Niveaulinie null besteht aus den in der unendlich fernen Ecke in der positiven Richtung der x-Achse zusammenhängenden geradlinigen Leitern $e_{x,y}$, $c_{x,y}$ und $l_{x,y}$, $m_{x,y}$ und der x Achse.

Die Niveaulinien $v/2 \leqq k' \leqq v$ verlaufen ganz im linken Schenkel, die Linien $0 < k' < v/2$ in beiden Schenkeln der oberen Hälfte des Feldes. Der unendlich ferne Randpunkt in der positiven Richtung der y Achse begrenzt die Linien $0 \leqq k' \leqq v$. Für unbegrenzt abnehmendes x nähert sich die Niveaulinie $k' = v/2$ der Parallelen $y = a/2$, für unbegrenzt wachsendes y der y-Achse asymptotisch (Abb. 23). Analoges gilt für die Niveaulinien $-v \leqq k' \leqq 0$ in der unteren Hälfte des Feldes.

4. Zeichnung der Kraft- und Niveaulinien. Rechnerisch gelangt man folgendermaßen zum Ziel. Man zeichnet die Kraft- und Niveaulinien im ersten und zweiten Quadranten der w_1, w_2-Ebene, also konzentrische Halbkreise um $w_1 = -1$, $w_2 = 0$ $[r = 1,\ e^{\pm b},\ e^{\pm 2b},\ \ldots.]$[1]) und von diesem Punkt ausgehende Halbstrahlen

$$(\varphi = 0,\ \frac{\pi}{n},\ 2\cdot\frac{\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{\pi}{2},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n}\cdot\pi,\ \pi, \qquad n \text{ gerade, positive Zahl}).$$

Mit Hilfe der Ausdrücke (15) bis (20) oder der erwähnten Reihendarstellungen der Abbildungsfunktion bestimmt man dann für die Schnittpunkte der gezeichneten Kraft- und Niveaulinien die zugehörigen Bildpunkte x, y.

Eine zweite Möglichkeit besteht in einer geometrischen Uebertragung der im ersten und zweiten Quadranten der w-Ebene gezeichneten Kraft- und Niveaulinien auf die obere Hälfte des kreuzförmigen Streifens der x, y-Ebene mit Hilfe der aufeinander folgenden Abbildungen, die wir im Abschnitt **1** betrachtet haben. Die Abbildung $u = \frac{w^2}{2-w^2}$ denken wir uns hier in $v = w^2$ und $u = \frac{v}{2-v}$ zerlegt. Zu diesem Zweck teilen wir den ersten und zweiten Quadranten der w-Ebene durch vom Nullpunkt ausgehende Halbstrahlen ϑ_w und konzentrische Halbkreise ϱ_w um denselben in ein Netz hinreichend kleiner Flächenstücke. Dieser Teilung entspricht infolge der Beziehungen $\vartheta_v = 2\cdot\vartheta_w$, $\varrho_v = \varrho_w{}^2$ eine hinreichend kleine Einteilung der v-Ebene von derselben Art. Sie gestattet uns, die gezeichneten Kraft- und Niveaulinien auf die v-Ebene zu übertragen.

Aus dieser Teilung der v-Ebene gewinnen wir durch die aus der Abbildung $u = \frac{v}{2-v}$ folgenden Beziehungen

$$\vartheta_v = \vartheta_u - \vartheta_{u'}, \quad -\pi < \vartheta_v, \quad \vartheta_u - \vartheta_{u'} \leqq \pi \quad \text{und} \quad \frac{\varrho_v}{2} = \frac{\varrho_u}{\varrho_{u'}}, \quad [u' = \varrho_{u'}\cdot e^{i\vartheta_{u'}} = u+1]$$

eine Einteilung der u-Ebene durch ein Kreisbüschel durch die Punkte 0 und 1 und einer dazu orthogonalen Kreisschar in ein Netz von Flächenstücken. Damit bekommen wir die Kraft- und Niveaulinien in der u-Ebene.

Die Uebertragung dieser Linien von der u-Ebene auf die Halbebene $J(p) \geqq 0$ erfolgt nach demselben Prinzip wie bei der w- und v-Ebene. Bei dieser Uebertragung hat man die Abb. 15 und 17 zu beachten.

[1]) Vergl. Fußnote 1, Abschn. 3, erstes Feld.

Das hiermit gewonnene hinreichend kleine Netz der Halbebene $J(p) \geqq 0$ wird nun durch die aus $s = \frac{1+p}{1-p}$ folgenden Relationen

$$\vartheta_p = \vartheta_{s'} - \vartheta_{s''}, \quad 0 \leqq \vartheta_p, \quad \vartheta_{s'} - \vartheta_{s''} \leqq \pi,$$

$$\varrho_p = \frac{\varrho_{s'}}{\varrho_{s''}}, \quad s' = \varrho_{s'} \cdot e^{i \cdot \vartheta_{s'}} = s - 1, \quad s'' = \varrho_{s''} \cdot e^{i \cdot \vartheta_{s''}} = s + 1$$

in ein Netz des ersten und zweiten Quadranten der s-Ebene übergeführt, welches aus einem Kreisbogenbüschel durch 1 und -1 und dazu orthogonalen Kreisbogen besteht. Wählen wir nun geeignete, auf den Kraft- und Niveaulinien der Halbebene $J(p) \geqq 0$ liegende Punkte P_p, so können wir mit diesen Netzen der p- und s-Ebene die zugehörigen Bildpunkte P_s bestimmen.

Für die p- und t-Ebene ergeben sich die Beziehungen

$$\vartheta_p + \frac{\pi}{2} = \vartheta_{t'} - \vartheta_{t''}, \quad \frac{\pi}{2} \leqq \vartheta_{t'} - \vartheta_{t''} \leqq \pi, \quad \text{falls } 0 \leqq \vartheta_p \leqq \frac{\pi}{2} \text{ ist},$$

$$\vartheta_p - 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \vartheta_{t'} - \vartheta_{t''}, \quad -\pi < \vartheta_{t'} - \vartheta_{t''} \leqq -\frac{\pi}{2}, \quad \text{falls } \frac{\pi}{2} \leqq \vartheta_p \leqq \pi \text{ ist},$$

und $\varrho_p = \frac{\varrho_{t'}}{\varrho_{t''}}$, wobei $t' = \varrho_{t'} \cdot e^{i\vartheta_{t'}} = t - 1$, $t'' = \varrho_{t''} \cdot e^{i\vartheta_{t''}} = t + 1$ gesetzt ist.

Aus diesen Beziehungen erhalten wir eine Einteilung des Einheitskreises der t-Ebene durch ein Kreisbogenbüschel durch 1 und -1 nebst orthogonaler Kreisbogenschar in ein System von Flächenstücken und gelangen damit zu den Punkten P_t. Dann bestimmen wir die Ausdrücke

$$x = \frac{a}{\pi} \cdot [\lg \varrho_s + \vartheta_t], \quad y = \frac{a}{\pi} \cdot [\vartheta_s - \lg \varrho_t]$$

$[0 \leqq \vartheta_s \leqq \pi, \quad -\pi \leqq \vartheta_t \leqq \pi,$ Abb. 17 und 19] jedesmal für solche Punkte P_s und P_t, die den gleichen Punkt P_p zum Bildpunkt haben, und gewinnen die Kraft- und Niveaulinien im kreuzförmigen Streifen der x, y-Ebene[1]).

In Abb. 23 sind die stark ausgezogenen Kraftlinien

$$k = \frac{v}{\pi} \cdot \lg (\sqrt{2} - 1), \quad k = \frac{v}{\pi} \cdot \lg 2,$$

$$k = \frac{v}{\pi} \cdot \lg (\sqrt{2} + 1)$$

und die Niveaulinien $k' = v/2$, $k' = -v/2$ berechnet. Bei den schwach ausgezogenen Kraftlinien sind nur ihre Anfangs- und Endpunkte und, wenn notwendig, auch ihre Schnittpunkte mit der x- und y-Achse zahlenmäßig bestimmt. Die Differenz je zweier aufeinander folgenden k-Werte, mit einziger Ausnahme der Kraftlinie $k = v/\pi \cdot \lg(\sqrt{2}+1)$, beträgt $v/\pi \cdot {}^1/_3 \lg(2(\sqrt{2}+1))$, a ist gleich π gewählt.

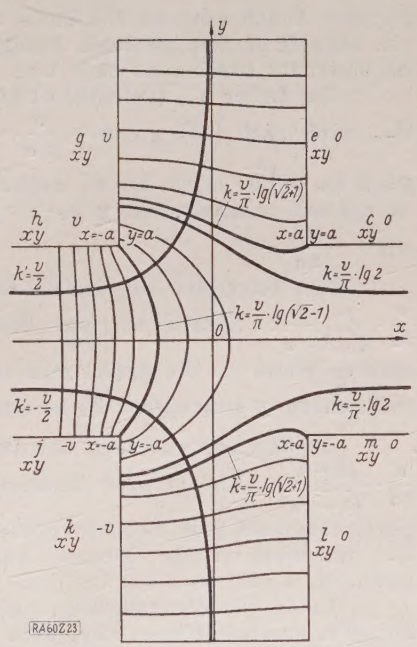

Abb. 23.

5. Die Feldstärke, die Größe der Flächenladung. Im Innern und an den begrenzenden geradlinigen Leitern des elektrostatischen Feldes im kreuzförmigen Streifen der x, y-Ebene lassen sich mit Ausnahme der acht Eckpunkte die Komponenten der Feldstärke darstellen durch die Ausdrücke

$$\mathfrak{E}_x = q \cdot [\sin[\vartheta_w - \vartheta_p] + \varrho_w \cdot \sin[2\vartheta_w - \vartheta_p] + \varrho_w^2 \cdot \sin[\vartheta_w + \vartheta_p] + \varrho_w^3 \cdot \sin \vartheta_p] \quad (28),$$

$$\mathfrak{E}_y = -q \cdot [\cos[\vartheta_w - \vartheta_p] + \varrho_w \cdot \cos[2\vartheta_w - \vartheta_p] - \varrho_w^2 \cdot \cos[\vartheta_w + \vartheta_p] - \varrho_w^3 \cdot \cos \vartheta_p] \quad (29),$$

[1]) Zu den hier besprochenen Einteilungen der Ebene beachte man für die praktische Anwendung die Fußnoten 1, 2, 3, Abschn. 3, erstes Feld, 1 vor Abschn. 2, zweites Feld und die Bemerkungen in »Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik«. (Teubner 1882) auf Seite 36.

wobei $$q = \frac{v}{2 \cdot a} \cdot \frac{1}{\varrho_w^2 + 2\varrho_w \cdot \cos \vartheta_w + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\varrho_w^4 - 4\,\varrho_w^2 \cdot \cos 2\,\vartheta_w + 1}}$$

gesetzt ist und ϑ_p durch (15) und (16) bestimmt wird. Die Differentiation der Entwicklungen des Abschnitts 2 liefert für die Komponenten der Feldstärke auch Ausdrücke, deren Koordinaten sich nur auf den kreuzförmigen Streifen der x, y-Ebene beziehen.

Bei unbegrenzter Annäherung an den unendlich fernen Randpunkt in der negativen Richtung der reellen Achse wird nach (24) $\mathfrak{E}_{-y} = v/a$. Bewegen wir uns unbegrenzt in der entgegengesetzten Richtung, so verschwinden diese Größen (23). Die unbegrenzte Annäherung an den unendlich fernen Randpunkt in der positiven Richtung der imaginären Achse liefert nach (27) $\mathfrak{E}_x = \frac{v}{2\,a}$. Für die unendlich ferne Ecke in der entgegengesetzten Richtung bekommen wir $\mathfrak{E}_{-x} = \frac{v}{2\,a}$. Auf der reellen Achse hat $\mathfrak{E}$ die negative Richtung der y-Achse.

Wir diskutieren die Feldstärke an den begrenzenden geradlinigen Leitern. Wir beginnen mit dem auf das Potential 0 geladenen Leiter $c_{x,y}$. Hier hat die Feldstärke die positive Richtung der y-Achse, $\mathfrak{E}_{-y}$ wird nach (29) gleich $-\frac{v}{2\,a} \cdot \frac{\varrho_w - 1}{\sqrt{2 - \varrho_w^2}}$. Bei unbegrenzter Annäherung an den Punkt $x = a, y = a$ $[\varrho_w \to \sqrt{2}]$ nimmt sie negative Werte an von beliebig großem absoluten Betrag. Mit unbegrenzt wachsendem x $(\varrho_w \to 1)$, konvergiert sie beständig zunehmend nach null.

Am Leiter $e_{x,y}$ (Potential 0) hat die Feldstärke die positive Richtung der x-Achse, $\mathfrak{E}_{-x}$ wird nach (28) gleich $-\frac{v}{2\,a} \cdot \frac{\varrho_w - 1}{\sqrt{\varrho_w^2 - 2}}$. Die unbegrenzte Annäherung an $x = a$, $y = a$ $(\varrho_w \to \sqrt{2})$ ergibt für sie negative Werte von beliebig großem absoluten Betrag. Mit unbegrenzt zunehmendem y $[\varrho_w \to \infty]$ nähert sich $\mathfrak{E}_{-x}$ beständig wachsend dem Grenzwert $-\frac{v}{2\,a}$.

Nun betrachten wir den auf das Potential v geladenen Leiter $g_{x,y}$. Hier ist $\mathfrak{E}_x$ gleich $\frac{v}{2a} \cdot \frac{\varrho_w + 1}{\sqrt{\varrho_w^2 - 2}}$. Nähern wir uns dem Punkt $x = -a$, $y = a$ unbegrenzt, so nimmt $\mathfrak{E}_x$ positive Werte an, die größer sind als jede noch so große positive Zahl. Mit unbegrenzt wachsendem y konvergiert $\mathfrak{E}_x$ beständig abnehmend nach $\frac{v}{2 \cdot a}$.

An dem angrenzenden auf das gleiche Potential geladenen Leiter $h_{x,y}$ ist $\mathfrak{E}_{-y}$ gleich $\frac{v}{2\,a} \cdot \frac{\varrho_w + 1}{\sqrt{2 - \varrho_w^2}}$. Unbegrenzte Annäherung an $x = -a$, $y = a$ liefert positive Werte, die größer sind als jede noch so große positive Zahl. Für unbegrenzt abnehmendes x hat $\mathfrak{E}_{-y}$ den Wert v/a zur Grenze. Analoges gilt für die auf die Potentiale $0, 0, -v, -v$ geladenen Leiter $m_{x,y}, l_{x,y}, k_{x,y}, j_{x,y}$.

Unter der Voraussetzung, daß wir für $y = b > 0$ und für $x = c < 0$ das Feld als homogen ansehen dürfen, folgt nach (27) und (24) für die an dem Flächenstück $x = -a$, $a \leqq y \leqq b$, $d \leqq z \leqq e$ befindliche positive Elektrizitätsmenge der Wert

$$\frac{\varepsilon}{4\,\pi} \cdot v \cdot [e - d] \cdot \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \cdot \lg [2 - \sqrt{2}] + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

und für die an dem Flächenstück $c \leqq x \leqq -a$, $y = a$, $d \leqq z \leqq e$ angehäufte positive Ladung der Wert

$$\frac{\varepsilon}{4 \cdot \pi} \cdot v \cdot [e - d] \cdot \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \lg [\sqrt{2} - 1] - \frac{c}{a} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

6. Die Randwirkung des »Zweiten Feldes« auf ein Elektron und die Lösung von Helmholtz. Wir bestimmen nun wieder die Größe der Ablenkung, die von dem nicht mehr als homogen anzusehendem Teil des Feldes auf ein Elektron ausgeübt wird. Das Elektron trete auf der x-Achse mit konstanter in ihre positive Richtung weisender Anfangsgeschwindigkeit q in das Feld ein. Wir bekommen für den Einfluß des Randes[1]) mittels (23), (24), $(|c| \gg 0)$

[1]) Siehe Abschn. 5, »Erstes Feld«.

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x\to\infty} = \frac{e}{m}\cdot\frac{v}{q^2}\cdot\left[-\,{}^1/_2 + \frac{1}{\pi}\cdot\lg 2 - \frac{c}{a}\right].$$

Um den Vergleich mit früher berechneten Werten durchführen zu können, müssen wir die untere Integrationsgrenze c negativ so groß wählen, daß das erste nicht homogene Glied in (24) für $x = c$, $y = 0$ gleich $v\cdot\frac{e^{-x}}{\pi}$ wird. Es muß dann $c = -a\cdot 1{,}629$ gewählt sein. Die Größe der Randwirkung auf ein Elektron wird dann

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x\to\infty} = \frac{e}{m}\cdot\frac{v}{q^2}\cdot 1{,}350.$$

Dieser Wert ist größer als der entsprechende Wert der zuerst behandelten Kondensatorform. Er ist kleiner als der Wert für den Helmholtzschen Kondensator, wenn die beiden Kondensatorplatten eine endliche Länge haben.

Mir ist es ein Bedürfnis, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor v. Laue. für seine wohlwollende Förderung während dieser Arbeit meinen Dank auszusprechen In Dankbarkeit für vielen Rat gedenke ich auch meines hochverehrten Lehrers, Herrn Geheimrat Schottky, dem ich mich seit meiner Jugend verbunden weiß.

VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. — Druck von A. W. Schade G. m. b. H., Berlin N 65.

Lebenslauf

Ich, Wilhelm Göhre, wurde am 6. Juli 1897 in Stötteritz bei Leipzig als Sohn des damaligen Pfarrers, späteren Staatssekretärs im preußischen Staatsministerium, Paul Göhre, geboren. Bis zu meinem Eintritt in das Heer im November 1916 besuchte ich die Oberrealschule zu Zehlendorf-Mitte. Im März 1918 beurlaubt, legte ich an dieser Schule die Kriegsreifeprüfung ab. Nach meiner Rückkehr aus dem Felde begann ich Anfang 1919 meine Studien an der Universität Berlin. Ich studierte Mathematik, Physik und Philosophie. Meine Ausbildung in der experimentellen Physik verdanke ich den Herren Professoren Geheimrat Rubens, Blasius und Herrn Professor Wehnelt, in der theoretischen Physik Herrn Geheimrat Planck und Herrn Professor v. Laue, in Mathematik besonders den Herren Professoren Erhard Schmidt, Bieberbach und Herrn Geheimrat Schottky. Meine Lehrer in Philosophie und Pädagogik waren die Herren Professoren Stumpf, Dessoir, Köhler und Herr Professor Rupp. Krankheiten verzögerten meine Studien erheblich. Am 21. Februar 1929 bestand ich die Promotionsprüfung in Berlin. Das Hauptfach war die Theoretische Physik, mein Examinator Herr Professor v. Laue.